ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

RECAPITULARE ŞI COMPLETĂRI

1 Mulţimi de numere reale

$(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$

Reamintim următoarele mulţimi de numere:

• mulţimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Submulţimi infinite ale lui $\mathbb{N}$ importante:

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ mulţimea numerelor naturale pare.

$3\mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots, 3n, \ldots\}$ mulţimea numerelor naturale multiplu de 3 etc.

• mulţimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$;

$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -2n, \ldots -2, 0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ mulţimea numerelor întregi pare.

Analog putem defini $3\mathbb{Z}, \ldots, p\mathbb{Z}$.

• mulţimea numerelor raţionale (sau a fracţiilor): $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

În aplicaţii, este util să punem condiţia ca $(m, n) = 1$, adică fracţia să fie simplificată. Această condiţie nu restrânge generalitatea definiţiei.
Un număr raţional se poate recunoaşte după modalităţile de scriere:

- fracţie ordinară de forma $\frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z}^*)$;
- fracţie zecimală finită (de exemplu: 0,35);
- fracţie zecimală infinită, dar periodică (de exemplu: 0,3737… = 0,(37)).

Dacă un număr nu admite nici una din aceste scrieri, el nu este raţional şi se va numi **iraţional**.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5};\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 0,1010010001…

Mulțimea numerelor raționale, împreună cu mulțimea numerelor iraționale, constituie mulțimea numerelor reale, care se va nota prin $\mathbb{R}$.

Prin $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vom nota mulțimea numerelor iraționale.

Se constată că: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

A. Mulțimea numerelor raționale*

1.[B] Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}_-$; d) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{N}=\mathbb{Q}$;

e) $0\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$; f) $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$; g) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}_-$; h) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

2.[B] Fie mulțimea $A=\left\{-3;-2;0;0,(6);-1;3;\frac{22}{7};-1,1(6);2;\frac{1}{6}\right\}$. Calculați:

a) $A\cup\mathbb{N}$; b) $A\cap\mathbb{N}$; c) $A\cap\mathbb{Z}$; d) $A-\mathbb{N}^*$; e) $A-\mathbb{Z}$;

f) $A\cap\mathbb{Q}$; g) $A\cap(\mathbb{Q}-\mathbb{Z})$; h) $A\cap(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$; i) $A\cap\mathbb{Z}^*$; j) $A\cap\mathbb{Z}_-$.

3.[B] Arătați că numerele $\frac{8}{30}$; 0,2(6); $\frac{-20}{-75}$; $\frac{24}{90}$ și $\frac{4\cdot a}{15\cdot a}$, $a\in\mathbb{N}^*$, sunt egale.

4.[B] Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere: 4: –2; 0,25; 0,(4); $-\frac{1}{4}$; –3,5 și 2, luând ca unitate de măsură centimetrul.

5.[B] Reprezentați pe axă numerele: $\frac{6}{15}$; 0,4; $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$; $-\frac{8}{-20}$ și 0,40. Ce observați?

6.[M] Ordonați crescător următoarele numere:

a) –8; 12; 30; –6; 1; –5; b) 0,4; –1,2; 1; $-\frac{1}{5};\frac{2}{3};-\frac{3}{10}$; –2;

c) 8,13(75); 8,1(375); 8,137(5); 8,1375; 8,(1375);

d) 10^{-1}; 10^{-2}; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; 10^{-3}; $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$.

7.[B] Scrieți partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) 21; b) 0,06; c) –31,5; d) $\frac{21}{4}$; e) –12,12;

f) $-\frac{30}{7}$; g) –0,24; h) –21; i) –2,3(2).

* B = exerciții pentru consolidarea cunoștințelor de bază; M = exerciții cu nivel mediu de dificultate; S = exerciții cu nivel sporit de dificultate

8.[M] a) Găsiți elementele mulțimilor:

$$A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right.\right\};\ B=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{6}{x+1}\in\mathbb{N}\right.\right\};\ C=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{-8}{x+2}\in\mathbb{Z}\right.\right\};$$

$D=\{x\in\mathbb{Z}\mid 3\le |x|<6\}$; $E=\{y\in\mathbb{N}\mid y=2^x$, unde $x\in A\}$.

b) Calculați:

1) $A\cup B$; 2) $B\cap C$; 3) $C-D$; 4) $A\cup C\cup D$;
5) $E-D$; 6) $D\cap\{0\}$; 7) $A\cup\varnothing$; 8) $E\cap(B-C)$.

9.[B] Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $-3\in\mathbb{Z}$; b) $4\in\mathbb{N}$; c) $0{,}3\in\mathbb{Z}$; d) $-\frac{4}{5}\in\mathbb{Q}$; e) $0\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$;

f) $1\in\mathbb{Q}^*$; g) $1{,}(4)\notin\mathbb{Q}$; h) $0\in\mathbb{Z}^*$; i) $\frac{-30}{6}\in\mathbb{Z}$; j) $0{,}2(4)\notin\mathbb{N}$; k) $0\notin\mathbb{Q}$.

10.[B] Scrieți toate numerele întregi cuprinse între numerele $-4\frac{2}{3}$ și $3\frac{1}{2}$.

11.[B] Dați exemple de patru fracții ordinare cuprinse între numerele $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{5}$.

12.[B] Fie $x, y\in\mathbb{Q}^*$. Dați exemple de numere x și y, astfel încât:

a) $x+y\in\mathbb{N}$; b) $x-y\in\mathbb{Z}$; c) $x\cdot y\in\mathbb{N}$; d) $\frac{x}{y}\in\mathbb{Z}$.

13.[M] Ordonați crescător numerele:

a) $-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{5}{4};-\frac{6}{5};$; b) $\frac{13}{15};\frac{12}{14};\frac{16}{17};\frac{17}{18}$.

14.[B] Determinați $x\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{x}{5}<\frac{10}{x}<\frac{x}{3}$.

15.[B] Scrieți opusul fiecărui număr:

$$12;\ -\frac{1}{5};\ 3{,}6;\ -0{,}1(4);\ \frac{2}{3};1-\frac{3}{5};\frac{317}{318}-\frac{917}{916};\ -0{,}2(4)+3{,}1(2).$$

16.[B] Aflați inversul fiecărui număr: $\frac{3}{5};-6;0{,}4;-2,(5);3\frac{1}{2};-\frac{7}{9};0{,}1;(0{,}1)^{-1};\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

17.[S] Determinați $a\in\mathbb{Z}^*$, astfel încât $\frac{a}{3}>\frac{10}{a}>\frac{a}{5}$.

18.[B] Transformați în fracție zecimală fiecare din următoarele numere raționale:

$$\frac{4}{5};\ \frac{3}{4};\ -\frac{2}{20};\ \frac{7}{8};\ -\frac{24}{25};\ -\frac{11}{6};\ \frac{-7}{6};\ \frac{5}{12};\ \frac{14}{33};\ \frac{83}{90}.$$

19.[M] Aflați cifra zecimală care ocupă locul 2011 în scrierea zecimală a numerelor:

$$\frac{7}{6};\ \frac{3}{7};\ \frac{17}{15};\ \frac{15}{12};\ \frac{183}{90}.$$

20.[B] Transformați în fracție ordinară fiecare din următoarele numere raționale:

1,5; –3,75; 1,02; 0,(6); 1,(36); –1,5; 1,(15);

2,1(6); –0,12(3); 2,5(45); 0,315315…; –1,43636…

21.[M] Scrieți cinci numere raționale cuprinse între –4 și –3.

22.[M] Calculați:

a) $\left(\frac{307}{102}+\frac{102}{307}\right)-\left(\frac{102}{307}+\frac{307}{102}\right)$;

b) $3+5\cdot(-2)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

c) $[-3^2+(-3)^2]:2^{10}$;

d) $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{71}{19}-\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{11}{5}\cdot\frac{71}{19}\right)$;

e) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2$;

f) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^1\right]$;

g) $\frac{3}{4}:\left(-\frac{5}{8}\right)+3\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)$;

h) $\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$;

i) 0,1 + 0,01 – 0,001 – 0,0001;

j) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+...+\frac{3}{58\cdot 61}$.

23.[M] Scrieți numărul $\frac{16}{25}$ sub formă de:

a) sumă a două numere raționale;
b) produsul a două numere raționale;
c) diferență a două numere raționale;
d) pătratul unui număr rațional;
e) produsul a trei numere raționale;
f) diferență a două pătrate perfecte de numere raționale.

24.[S] a) Stabiliți regula de formare a șirului: 3; 7; 11; 15; ….
b) Completați șirul cu încă trei termeni.
c) Este 2011 termen al șirului?
d) Ce număr este pe poziția 11 în acest șir?
e) Al câtelea termen al șirului este numărul 2007?

B. Mulțimea numerelor iraționale

1.[B] Calculați pătratele numerelor:

$$0;\ 1;\ 13;\ \frac{1}{3};\ -3;\ 2\frac{2}{3};\ 1,2;\ 0,4;\ -17;\ -\frac{3}{5};\ 3^2;\ \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

2.[B] Aflați pătratul cărui număr rațional pozitiv este pentru fiecare din următoarele numere:

$$0;\ 1;\ 9;\ \frac{1}{4};\ 25;\ \frac{64}{9};\ 0,(4);\ 121;\ 4^3;\ 5^6;\ 9^7;\ 16^5.$$

3.[M] Arătați că următoarele numere sunt numere iraționale;

a) $\sqrt{3}$; b) $2+\sqrt{3}$; c) $\sqrt{5}$; d) $1-\sqrt{5}$.

4.[B] Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

a) $\sqrt{10816}$; b) $\sqrt{13225}$; c) $\sqrt{590{,}9761}$; d) $\sqrt{\frac{169}{676}}$; e) $\sqrt{\frac{5{,}29}{0{,}0529}}$.

5.[M] Folosind descompunerea numerelor în factori primi, calculați:

$$\sqrt{576}; \sqrt{144}; \sqrt{361}; \sqrt{9{,}61}; \sqrt{20736}.$$

6.[B] Fie $a, b \in \mathbb{R}^* - \mathbb{Q}$. Dați exemple de numere a și b, astfel încât suma, diferența, produsul și câtul lor să fie numere raționale.

7.[M] Care dintre numerele următoare sunt raționale?

$$\sqrt{9801}; \sqrt{4509}; \sqrt{6204}; \sqrt{640025}; \sqrt{99225}.$$

8.[M] a) Arătați că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0; 1; 4; 5; 6 sau 9.

b) Care dintre următoarele numere sunt iraționale?

$$\sqrt{314}; \sqrt{324}; \sqrt{363636}; \sqrt{7396}; \sqrt{5x+2}, x \in \mathbb{N}; \sqrt{7777};$$

$$\sqrt{5a+13}, a \geq 3, a \in \mathbb{N}; \sqrt{a^2+a+8}, a \in \mathbb{N}; \sqrt{n^2+n}, n \in \mathbb{N}^*; \sqrt{4n+3}, n \in \mathbb{N}^*.$$

9.[M] Arătați că, pentru orice număr natural n, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5n+17}$; b) $\sqrt{5^{2n}+11^n+6^n}$; c) $\sqrt{6^{2n}+7}$;

d) $\sqrt{n^2+n}$; e) $\sqrt{5n^2+8}$.

C. Mulțimea numerelor reale

Mulțimea numerelor reale reprezintă mulțimea fracțiilor zecimale infinite, periodice sau neperiodice ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

EXERCIȚII PENTRU CONSOLIDAREA CUNOȘTINȚELOR DE BAZĂ

1. Efectuați operațiile:

a) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$; c) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$; d) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$; e) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$; f) $\mathbb{Q} \cap \varnothing$;

g) $\mathbb{R} \cup \varnothing$; h) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$; i) $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$; j) $\mathbb{Q} \cap \left\{\frac{3}{4}; 0; \sqrt{5}\right\}$;

k) $\left\{\sqrt{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}; 6\right\} - \mathbb{R}$; l) $\mathbb{N} \cup \left\{2; 7; \frac{3}{4}; -\sqrt{7}\right\}$; m) $\mathbb{N} \cap \left\{-1; 2; \frac{5}{6}; \sqrt{3}\right\}$.

2. Ordonați crescător următoarele numere:

a) $2\sqrt{7}$; $4\sqrt{5}$; $3\sqrt{13}$; $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{12}$; b) $2\sqrt{15}$; $3\sqrt{11}$; $2\sqrt{6}$; 4; $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$;

c) $\left|2-\sqrt{3}\right|$; $\left|1-\sqrt{2}\right|$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{3}-1$; d) $1\frac{1}{3}$; $-2\sqrt{3}$; $-1{,}1(6)$; $-\sqrt{16}$; $-\sqrt{72}$.